UE MEC24b - Mars 2012

Mécanique du solide indéformable

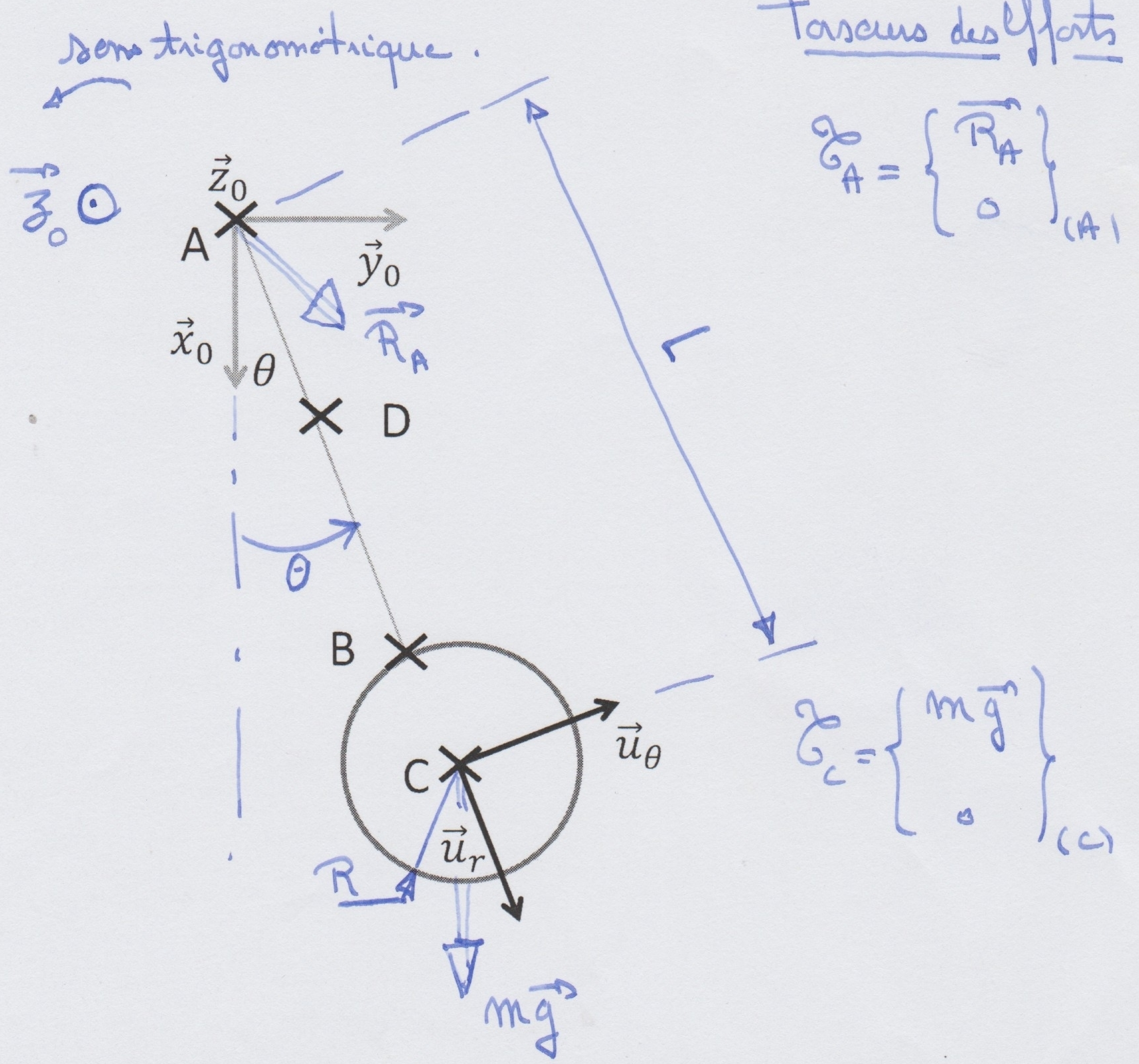
Nom :
Prénom :
Groupe :

Instructions :

- Lisez le sujet en entier avant de commencer.
- Ne répondez que dans les cadres imprimés.
- Préparez vos calculs sur une feuille de brouillon avant de reporter vos résultats au propre.

Pendule pesant

Soit un pendule composé d'un cylindre de rayon BC=R, de masse m, lié à une tige métallique de masse négligeable. La tige est « soudée » au cylindre en B. La longueur AC est notée L. Soit R1 $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z}_0)$ un repère lié à ce pendule.
La tige métallique est liée à une paroi horizontale en A par une liaison pivot d'axe $\vec{z}_0$. Soit Ro $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen fixe lié à cette paroi. L'angle formé par $\vec{u}_r$ et $\vec{x}_0$ est noté θ.

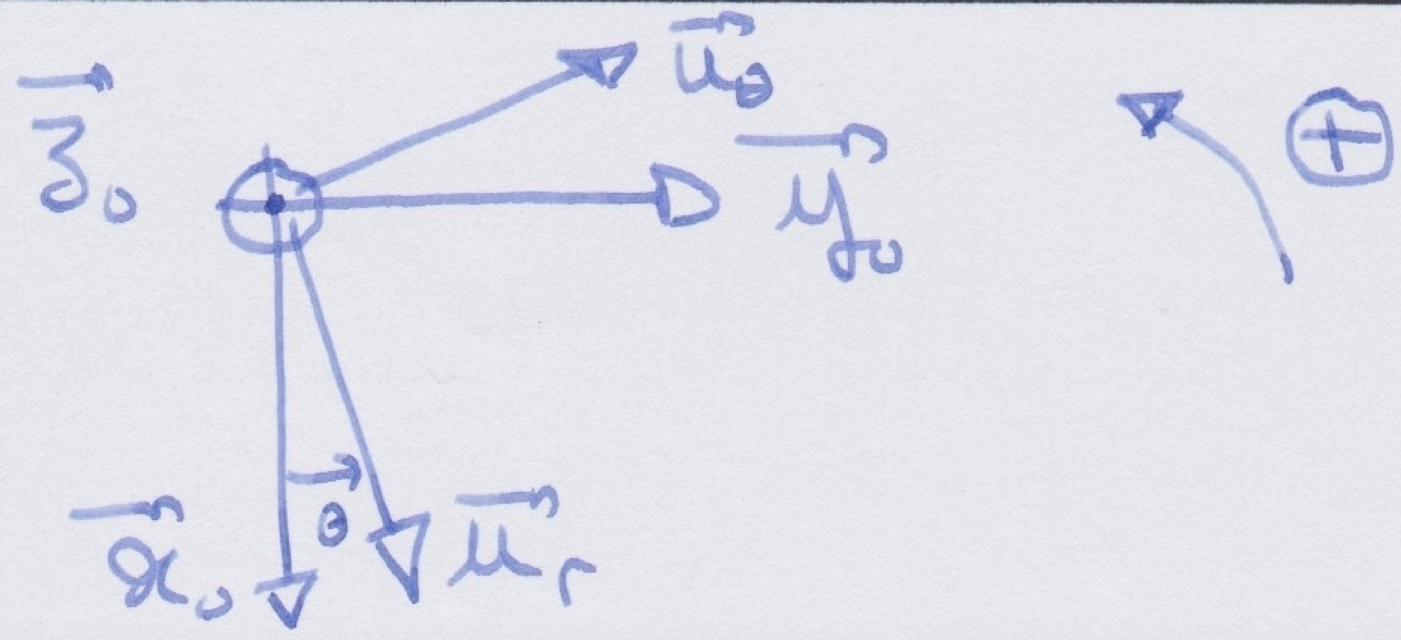


1) Combien le système a-t-il de degrés de liberté ? (0.5pt)

1 degré de liberté : θ.

0.5

2) Dessinez la figure de travail associée aux repères décrits précédemment. (0.5pt)



✓ $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est fixe

✓ $R(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z = \vec{z}_0)$ est mobile. 1

3) Répertoriez, dessinez et nommez les efforts subis par le pendule (cylindre+ tige) sur la figure (1pt).

Système isolé (cf schéma 1re page)

4) Quelles sont les inconnues du problème et combien d'équations seront nécessaires pour identifier toutes ces inconnues (0.5pt) ?

$\vec{R}_A$ et θ sont les inconnues du problème $\Rightarrow$ 3 grandeurs scalaires à déterminer (pb 2D) $\Rightarrow$ Il faut 3 équations scalaires. 1.5

PFD en rotation autour du point A (théorème du moment cinétique au point A):

5) Exprimez le PFD en rotation autour du point A en faisant intervenir le moment dynamique en A (1.5pt).

P.F.D. :

$\mathcal{D} = \mathcal{F}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{Bmatrix} m\vec{a}(C) \\ \vec{\delta}_{S/R_0}(A) \end{Bmatrix}_{(A)} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_A \\ 0 \end{Bmatrix}_{(A)} + \begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{AC} \wedge m\vec{g} \end{Bmatrix}_{(A)}$ 3

torseur dynamique = torseur des efforts.

6) Combien d'équations utilisables le PFD précédent fournira-t-il ? (0.5 pt)

2 équations vectorielles $\Rightarrow$ en 2D : 3 équations scalaires. 3.5

7) Exprimez le moment dynamique en A en fonction du moment cinétique en A (0.5pt).

A est un point fixe aussi : $\vec{\delta}_{S/R_0}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{R_0} \left[\vec{L}_{S/R_0}(A) \right]$ 4

Expression du moment cinétique en A

8) Dans un premier temps, on exprime le moment cinétique en C. Justifiez pourquoi le moment cinétique en C peut s'écrire sous la forme (0.5pt):

$$\vec{L}_C^s = [J]_C \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$$

Puisque c'est le centre de gravité du système S alors : $\vec{L}_{S/R_0}(C) = [J(C)]\,\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$ 4.5

$(R_1 \equiv S)$.

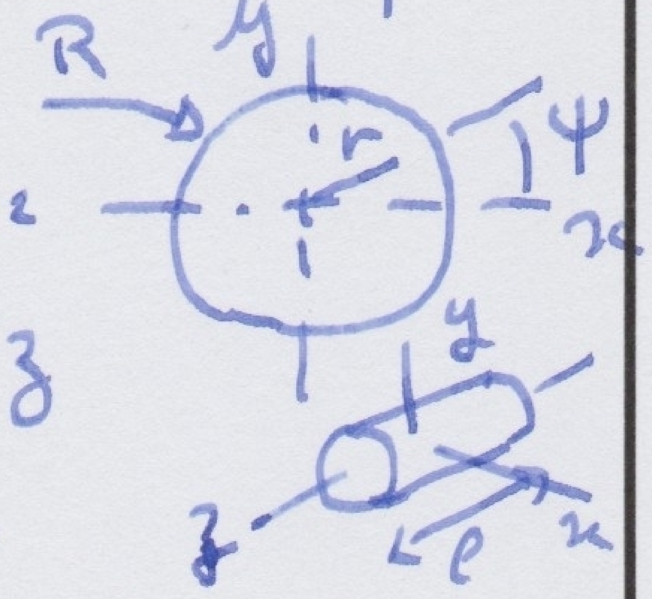
9) A partir de la définition de la matrice d'inertie, et en négligeant l'influence de la barre AB, démontrez que le moment d'inertie du pendule autour de $\vec{z}_0$ en C s'écrit (1.5pt) :

$$J_{zz}^{C} = \frac{mR^2}{2}$$

$J_{zz}(C) = \int (x^2+y^2)\, dm$ avec $dm = \rho\, dv$ et ρ = masse volumique

on a $dv = r\, d\psi\, dr\, dz$ et $\begin{cases} x = r\cos\psi \\ y = r\sin\psi \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2$, soit : $J_{zz}(C) = \int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{0}^{R}\int_{-l/2}^{l/2} r^2 \rho\, r\, d\psi\, dr\, dz$



avec $m = \rho\pi R^2 l$

$\Rightarrow \boxed{J_{zz}(C) = \frac{1}{2} m R^2}$

6

10) A partir du résultat de la question 9, et en admettant que $J_{xz}^{C} = J_{yz}^{C} = 0$, exprimez le moment cinétique en C (0.5pt) :

$\vec{L}_{S/R_0}(C) = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0}$ et $\vec{\Omega}_{S/R_0} = (0, 0, \dot\theta)_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z = \vec{z}_0)}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{S/R_0}(C) = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta\, \vec{z}_0}$

6.5

11) En utilisant le résultat de la question 10), la loi « BABAR », et la formule de Bour, exprimez $\vec{L}_A^{s}$, le moment cinétique en $\underline{A}$ en fonction de m, R, L et θ (2.5pt).

On a : $\vec{L}_{S/R_0}(A) = \vec{L}_{S/R_0}(C) + \vec{AC} \wedge m \vec{V}_{S/R_0}(C)$ or $\vec{AC} = L\vec{u}_r$ et $\vec{V}(C) = L\dot\theta \vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \vec{L}_{S/R_0}(A) = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta\, \vec{z}_0 + (L\vec{u}_r) \wedge (mL\dot\theta\, \vec{u}_\theta)$ avec $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{z}_0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{S/R_0}(A) = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)\dot\theta\, \vec{z}_0}$

9

12) A partir des résultats précédents, montrez enfin que le PFD en rotation autour du point A s'écrit simplement (1.5pt) :

$$\mathrm{Lg}\sin(\theta) + \left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)\ddot{\theta} = 0$$

Appliquons le théorème du moment dynamique : $\vec{\delta}_{S/R_0}(A) = \vec{AC} \wedge m\vec{g}$

et $\vec{\delta}_{S/R_0}(A) = \frac{d\vec{L}(A)}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d}{dt}\Big|_{R_0}\left[m\left(\frac{1}{2}R^2 + L^2\right)\dot{\theta}\vec{z}_0\right]$

$\vec{\delta}_{S/R_0}(A) = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)\ddot{\theta}\vec{z}_0$ et $\vec{AC} = L\vec{u}_r$; $\vec{g} = +mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow$ $\boxed{Lg\sin\theta + \left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)\ddot{\theta} = 0}$

10.5

13) Après avoir linéarisé cette équation (θ supposé petit), on cherchera la solution de cette équation différentielle sous la forme : $\theta = Acos(\omega t)$. Exprimez la pulsation ω et la période d'oscillation associée (1pt).

Si $\theta << 1$ alors $\sin\theta \simeq \theta$.

$\Rightarrow Lg\theta + \left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)\ddot{\theta} = 0 \Longleftrightarrow \omega^2\theta + \ddot{\theta} = 0$ avec

$\boxed{\omega^2 = Lg / \left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)}$

11.5

14) Que se passe-t-il si L>>R, c'est-à-dire si on fait l'approximation d'une masse concentrée. Commentez l'influence de l'inertie en rotation du pendule par rapport à une masse concentrée (1pt).

Si $L >> R$ alors $\omega^2 \simeq Lg / L^2 = g/L$ ce qui revient au résultat du pendule simple.

12.5

PFD en translation (on s'intéresse aux efforts en A dans la base R0) :

15) Exprimez le PFD en translation en faisant intervenir l'accélération du centre de gravité. Exprimez ce résultat en fonction de m, g, L et θ (2pt).

On a : $m\vec{a}_{S/R_0}(C) = \vec{R}_A + m\vec{g}$ et $\vec{a}_{S/R_0}(C) = \frac{d\vec{v}(C)}{dt}_{S/R_0} = \frac{d}{dt}(L\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$

Or $\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta = (\dot{\theta}\vec{z}_0)\wedge\vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

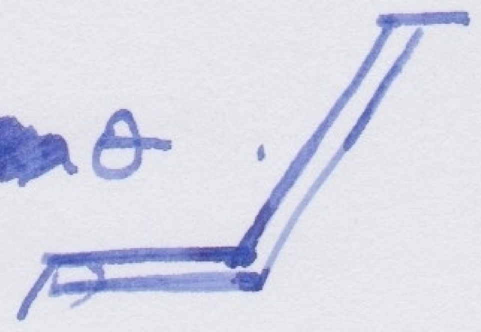
$\Rightarrow \vec{a}_{S/R_0}(C) = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

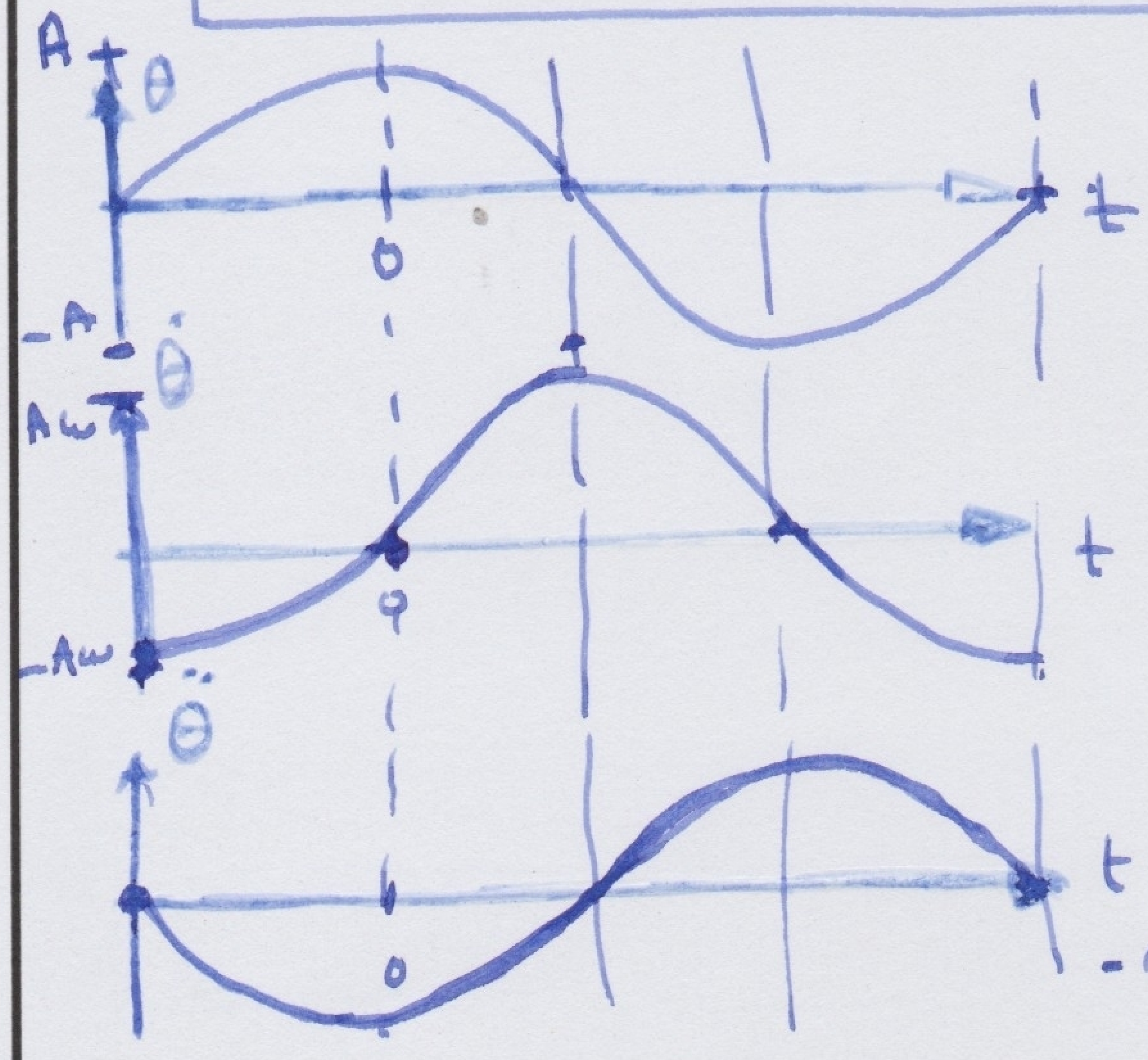
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} -L\dot{\theta}^2 = R_{A_r} + mg\cos\theta \\ L\ddot{\theta} = R_{A_\theta} - mg\sin\theta \end{cases}}$$

14.5

16) En déduire les efforts subits par la liaison pivot A au cours du temps dans le repère R0. Dessinez-les sur un même graphique pour une période d'oscillation (1.5pt).

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_{A_r} = -L\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \\ R_{A_\theta} = L\ddot{\theta} + mg\sin\theta \end{cases}} \begin{matrix} \simeq -L\dot{\theta}^2 - mg \\ \simeq L\ddot{\theta} + mg\theta \end{matrix}$$

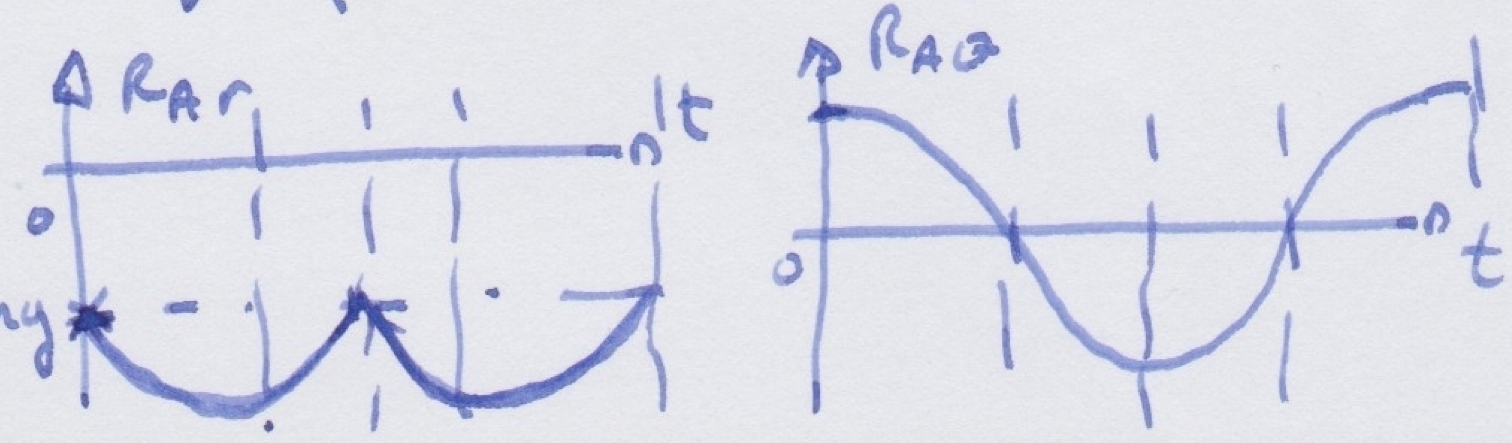




$$\begin{cases} \theta = A\cos\omega t \\ \dot{\theta} = -A\omega\sin\omega t \\ \ddot{\theta} = -A\omega^2\cos\omega t \end{cases}$$

$R_{A_r} \simeq -LA^2\omega^2\sin^2\omega t - mg$. (1)

$R_{A_\theta} \simeq (-AL\omega^2 + Amg)\cos\omega t$ (2)

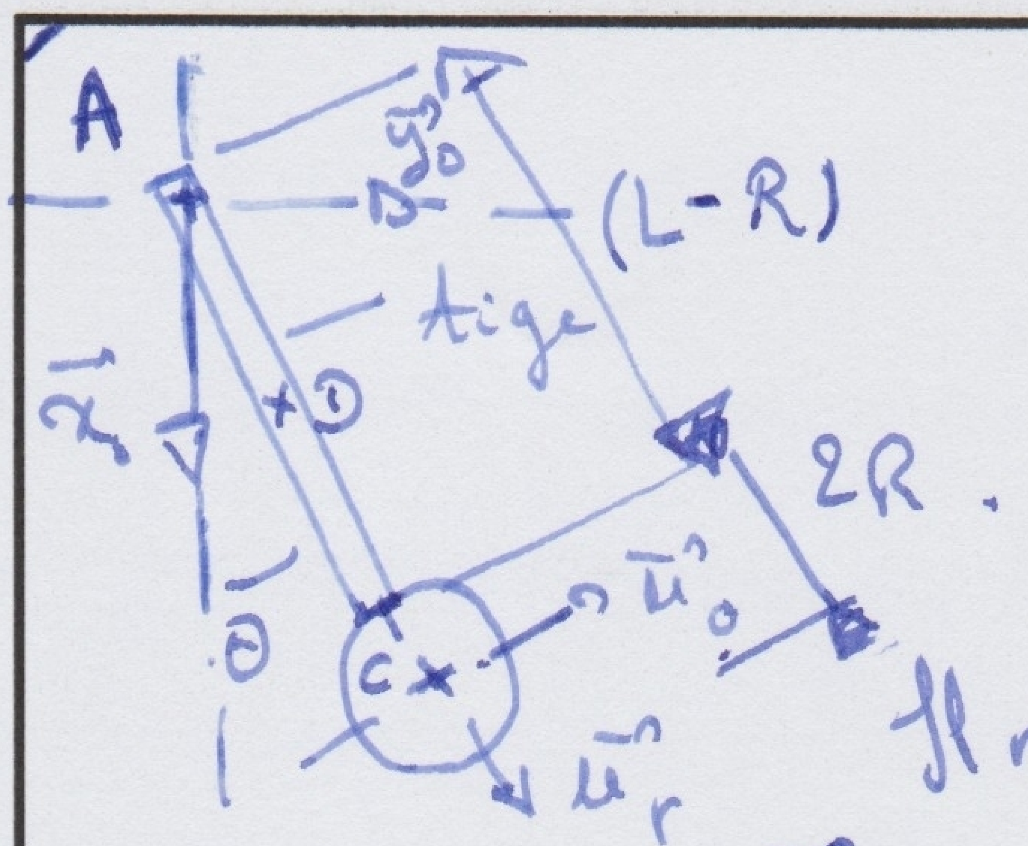


16

Pour aller plus loin sur la période d'oscillation du pendule :

17) Que faut-il modifier dans l'exercice pour prendre en compte l'influence de l'inertie de la tige AB sur la période d'oscillation (3pt)? On considèrera une tige de section carrée et de masse M. On utilisera :

$$J_{zz}^{D} = \frac{M(L-R)^2}{12}$$



Pour résoudre le pb barre + disque, on va utiliser le fait que l'on a une superposition (linéarité) du torseur dynamique :

$$\vec{\delta}_{total/R_0}(A) = \vec{\delta}_{\text{"tige"}/R_0}(A) + \vec{\delta}_{cylindre/R_0}(A)$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\vec{\delta}_{tige/R_0}(A)$

or $\vec{\delta}_{tige/R_0}(A) = \dfrac{d\vec{L}_{T/R_0}(A)}{dt}\Big|_{R_0}$ et $\vec{L}_{tige/R_0}(A) = \vec{L}_{tige/R_0}(D) + \vec{AD} \wedge M\vec{V}_{T/R_0}(D)$

et le torseur cinématique de la tige vaut : $\mathcal{V}_{tige/R_0} = \begin{Bmatrix} \dot\theta\vec{z}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(A)}$

$\Rightarrow \vec{V}_{T/R_0}(D) = \vec{DA} \wedge \dot\theta\vec{z}_0$ avec $\vec{DA} = \left(\dfrac{L-R}{2}\right)(-\vec{u}_r)$ $\Rightarrow \vec{V}_{T/R_0}(D) = \frac{1}{2}(L-R)\dot\theta\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \vec{L}_{tige/R_0}(A) = \underbrace{\vec{L}_{Tige/R_0}(D)}_{\text{peut s'écrire autrement } [(J_{zz}^D)]\vec{\Omega}_{tige/R_0}} + \vec{AD} \wedge M\vec{V}_{T/R_0}(D) \Big\} = \left(J_{zz}^D + \frac{1}{4}(L-R)^2 M\right)\dot\theta\vec{z}_0$

et donc $\vec{\delta}_{total}(A) = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{L}_{tige/R_0}(A)\right) + \vec{\delta}_{disque/R_0}(A) = \vec{AC} \wedge m\vec{g} + \vec{AD} \wedge M\vec{g}$.

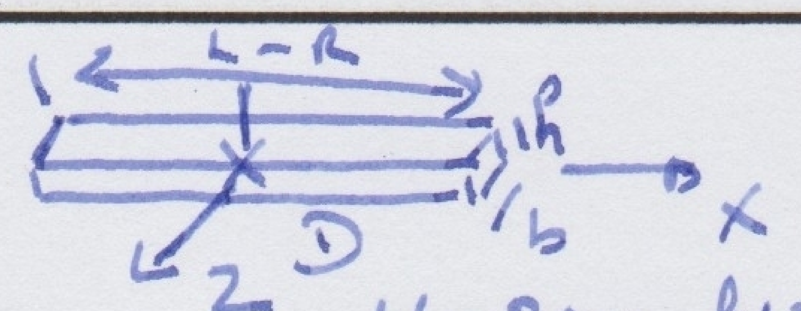
$\Rightarrow \left\{\frac{1}{3}M(L-R)^2 + m\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\right\}\ddot\theta + \{mL + M(L-R)\}g\sin\theta = 0$

19

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = g(mL + M(L-R)) / \left(\frac{1}{3}M(L-R)^2 + m(L^2 + R^2/2)\right)}$

18) Bonus (2pts) : démontrez que le moment d'inertie de la barre en D et autour de z s'écrit :

$$J_{zz}^D = \frac{M(L-R)^2}{12}$$



$J_{zz}^D = \int (x^2+y^2)\,dm$ avec $dm = \rho\,dx\,dy\,dz$.

$$J_{zz}^D = \rho\int_{-(L-R)/2}^{(L-R)/2} x^2 dx \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} dz + \rho\int_{-(L-R)/2}^{(L-R)/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \int_{-b/2}^{b/2} dz \text{ et } M = \rho(L-R)hb$$

$$J_{zz}^D = \frac{1}{12}M(L-R)^2 + \frac{1}{24}Mh^2$$

terme négligé dans le problème !

21