TD4 - Tenseur des contraintes -

Exercice 1

Soit un barreau de section carré collé à 45° sur une paroi de normale $\vec{n}$. Une force $\vec{F}$ est appliquée dans la direction du barreau à l'ooposé du point de collage.

1. Quel est l'effort normal sur le joint de colle ?
2. Quel est l'effort tangentiel sur le joint de colle ?
3. Quelles sont les valeurs moyennes des contraintes tangentielle et normale dans le joint de colle ?

Exercice 2

Un levier doit transmettre un moment à un axe de diamètre $D = 50mm$. Deux solutions sont envisagées :

1. L'axe est emmanché sans jeu dans le levier sur une longueur de 30mm. Quelle est la valeur moyenne de la contrainte tangentielle à la surface de l'axe ?
2. L'axe a du jeu, la rotation est bloquée par une clavette de longueur $l = 30mm$ et de section $s = 10mm \times 10mm$. Quelles est la valeur moyenne de la contrainte dans la clavette ?

Schéma (An: F = 300 kN).

Exercice 3

Un disque tourne à une vitesse de rotation ω. Il exerce à la surface d'un liquide une contrainte tangentielle dans la direction portée par $\vec{e_\theta}$. Pour un écoulement laminaire, la contrainte résultante est de la forme $kr\omega$ ou k est une constante qui dépend de la viscosité du fluide et de l'épaisseur de fluide entre le disque et le plan opposé immobile parallèle au disque.

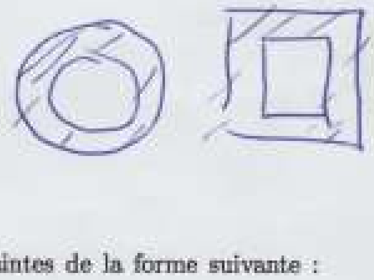
1. Calculer la puissance du moteur nécessaire au mouvement du disque.

An: k = 1 ; R0 = 20 mm et Ω = 1 rad/s

Exercice 4

Un tube d'aluminum de 1m, de module d'Young $E = 75GPa$ et d'épaisseur $e = 1mm$ subit un taux d'allongement de 0.0006.

1. Quelles contraintes et forces de traction subit-il dans le cas :
   - d'une section circulaire de diamètre d=20mm
   - d'une section carrée de côté l=20mm
2. Quelles sont les longueurs finales des tubes ?



Exercice 5

Une éprouvette cylindrique est soumise à un tenseur des contraintes de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}_{r\theta z}.$$

1. Donneer la contrainte sur une facette faisant un angle α avec l'axe z.

2. Calculer la contrainte normale sur cette facette.
3. Pour quelle direction de la facette a-t'on une contrainte tangentielle maximale ?

Exercice 6

Une éprouvette de section rectangulaire $b \times h$ est soumise à un tenseur des contraintes : $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} Ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{xyz}$.

1. Donner la dimension de K.
2. Donner le vecteur contrainte sur une section de normale $\vec{e_x}$.
3. Calculer la résultante et le moment au centre de la section.

Exercice 7

L'état de contrainte dans un tube est donné par : $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix}_{r\theta z}$.

1. Donner le vecteur contrainte sur la section du tube.
2. Donner le vecteur contrainte sur le pourtour du tube.
3. Calculer le moment au centre de la section et la résultante exercée sur la section.

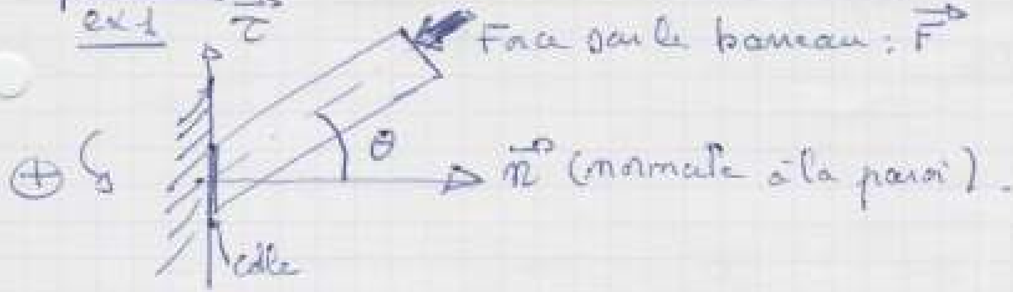
Exercice 8

Une pièce parallélépipédique posée sur un plan z=0 est soumise au champ de pesanteur $g\vec{e_z}$.

1. Montrer en utilisant les équations du mouvement et les conditions d'interface avec l'air que l'on peut trouver le tenseur des contraintes.
2. Calculer le moment et la résultante au centre de la section de contact pièce/plan.

TD 4 - Tenseur des contraintes

ex 1



1) effort normal sur le joint de colle : $\vec{F}\cdot\vec{n} = \|\vec{F}\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot\cos\theta$
$= -F\cdot\cos\theta$

2) effort tangentiel sur le joint de colle : $\vec{F}\cdot\vec{\tau} = \|\vec{F}\|\cdot\|\vec{\tau}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{F},\vec{\tau}}) = -F\cdot\cos(-\theta+\frac{\pi}{2}) = -F\cdot\sin\theta$.

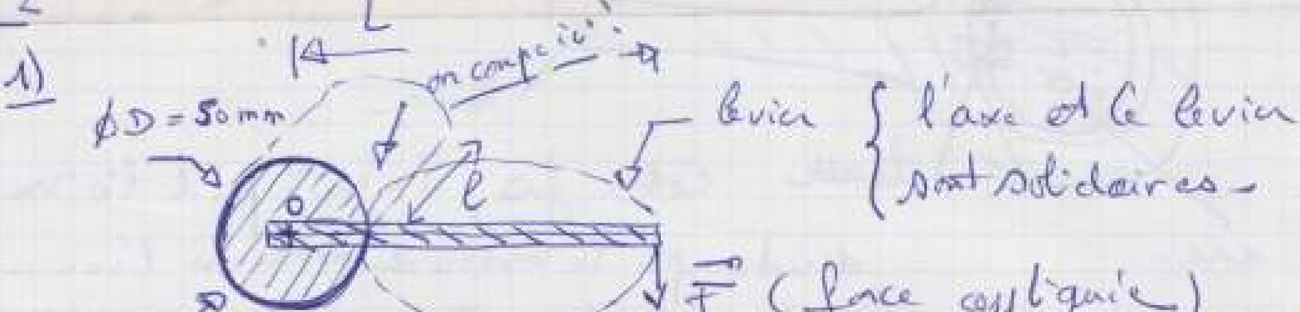
si $\theta = 45°$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} F_n = -F/\sqrt{2}. \\ F_\tau = -F/\sqrt{2}. \end{cases}$

3) contrainte normale moyenne : $\sigma_n = F_n/S$ avec S la section
contrainte tangentielle moyenne : $\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}$

---

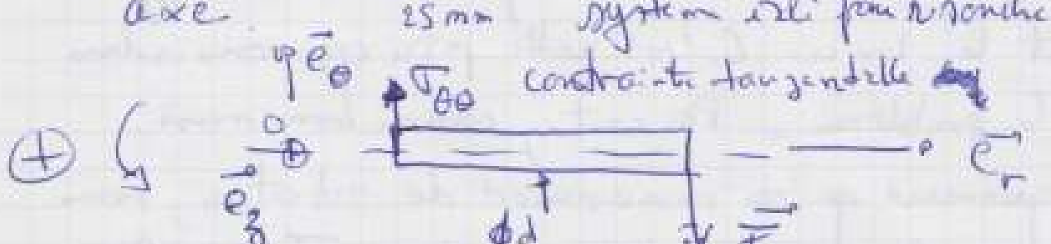
exo 2

1)



l'axe et le levier sont solidaires.

système isolé pour résoudre le problème



$\sigma_{\theta\theta}$: contrainte tangentielle que la partie gauche exerce sur la partie droite que l'on a conservé.

Le système isolé est à l'équilibre en rotation $\Rightarrow$

$$-\vec{M}_F(O) = \vec{M}_{\sigma_{\theta\theta}}(O) \Rightarrow +LF = \underbrace{\sigma_{\theta\theta}}_{\text{contraint}}\ \underbrace{2\pi\left(\frac{D}{2}\right)\times l}_{\text{surface}}\ \times \underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{bras de levier}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\theta\theta} = F \times \frac{2L}{\pi D^2 l}}$$

Vérification de l'homogénéité :

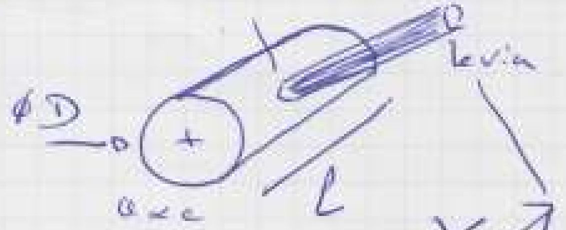
(5,3 MPa)
← résultats avec les nouvelles valeurs.

$$[\sigma] = \frac{M L T^{-2}}{L^2} = M L^{-1} T^{-2}$$

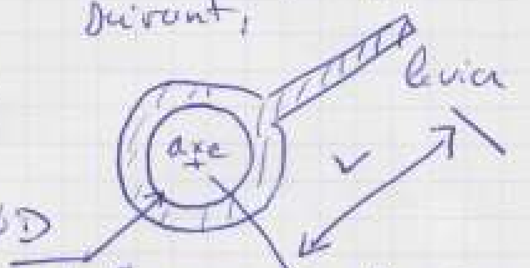
$$\left[F \frac{2L}{\pi D^2 l}\right] = M L T^{-2} \frac{K}{L^2 K} = M L^{-1} T^{-2}$$

} <u>OK</u>

<u>Question</u> : Pourquoi $\sigma_{\theta\theta}$ est multiplié par : $2\pi\left(\frac{D}{2}\right) \cdot l$?



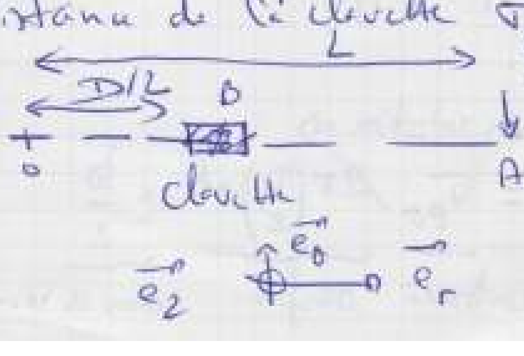
on aurait pu faire le dessin suivant,



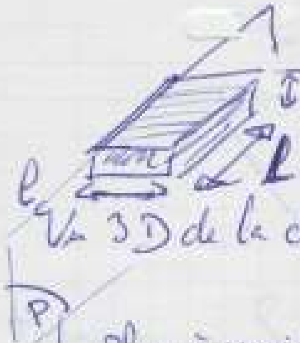
et l'on aurait eu le même résultat !

Cette fois, il n'existe pas de liaison directe par la matière du levier vers l'axe...

la clavette joue ce rôle, c'est donc elle qui transmet l'effort entre l'axe et le levier. C'est cette pièce que nous isolons pour résoudre le problème. Par contre, comme nous nous intéressons uniquement qu'au mouvement de rotation, nous n'allons calculer que le moment dû à la force $\vec{F}$ et à la résistance de la clavette $\sigma_{\theta\theta}$...



$$\vec{M}_F(O) = -LF\vec{e_z}$$



Vue 3D de la clavette

$$\vec{m}_{\sigma_{\theta\theta}\,\text{clavette}} = \overbrace{\sigma_{\theta\theta} \times \underbrace{(l_c \times h_c)}_{\text{surface}}}^{\text{force}} \times \underbrace{\frac{D}{2}}_{\substack{\text{distance} \\ = \\ \text{bras de levier}}} \vec{e}_2$$

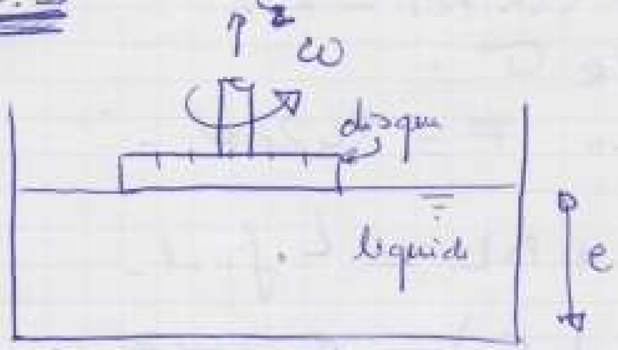
(P) Plan à considérer pour le calcul...

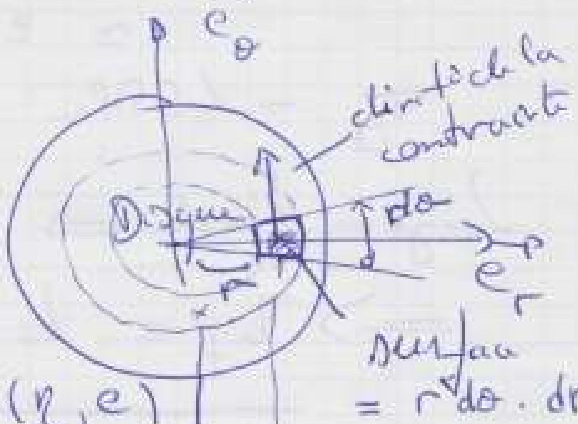
l'équilibre $\Rightarrow$ $LF = \sigma_{\theta\theta}\, l_c h_c \frac{D}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\theta\theta} = F \frac{2L}{l_c h_c}} \text{ ou}$$

or $l_c \times h_c << \pi D^2 l \Rightarrow$ il faut une clavette très solide pour supporter l'effort...

<u>ex. 9</u>





× <u>forme de la contrainte</u>:

$\sigma_{\theta\theta}(r) = k r \omega$ avec $k(\eta, e)$ (moteur).

1) Calcul de la puissance nécessaire au mouvement du disque

Puissance $=$ $\underbrace{\text{Force} \times \text{Vitesse de translation}}_{\Rightarrow \text{Ici}}$ $+$ Couple $\times$ Vitesse de rotation

$$P = \underset{\text{couple}}{\Gamma} \cdot \underset{\text{vitesse de rotation}}{\omega}.$$

$$\Gamma = \int_{\text{surface du disque}} \sigma_{\theta\theta} \times (2\pi r\,dr) \underbrace{r}_{\text{bras de levier}}$$

$$T = \int_0^R k r \omega \, 2\pi r dr \, r = \frac{1}{2} \pi k \Omega R^4$$

$$\Rightarrow \text{Puissance} = \frac{1}{2} \pi k \Omega^2 R^4$$

<u>Rem</u>: pourquoi Ω^2 est le bon facteur ? on aurait pu avoir Ω ou Ω^3 ! ~~celas~~ pourquoi Ω^2 est juste...

<u>AN</u>: $k = 10^{-3} \times \frac{1}{3} 10^{-3}$ $R = 20\,mm$ et $\Omega = 1\,rad/s$.

<u>ex4</u>: <u>1</u>. $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \sigma = 450 \cdot 10^5\,Pa$.

$\sigma = 45\,MPa$.

$\hookrightarrow F = 2686\,N$

$$F = \sigma \times S = \sigma \times \pi((R+e)^2 - R^2)$$

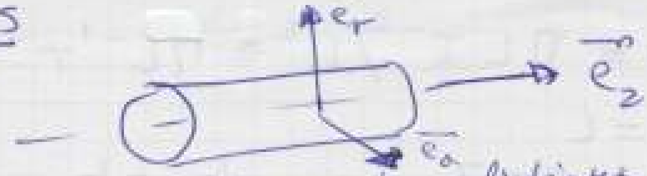
$$\simeq 2\pi R e \sigma.$$

$\sigma_{\square} = 45\,MPa \longrightarrow F = 3420\,N$.

Longueur finale $\Rightarrow L_0 + \Delta L = L_{final}$.

$$\Rightarrow L_f = L_0(1+\varepsilon) = 1,0006\,m$$

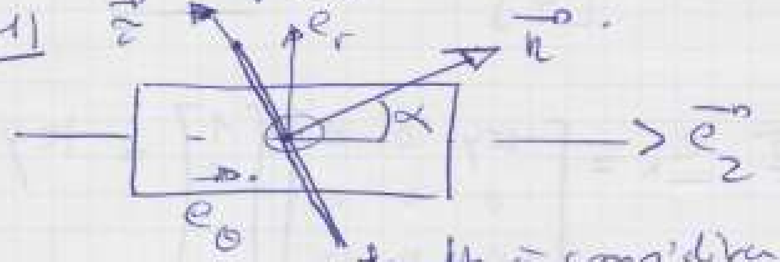
ex 5



éprouvette cylindrique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

1)



facette à considérer.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{vmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

On doit exprimer le vecteur contrainte sur la facette orientée par $\vec{n}$:

$$\underbrace{\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{vmatrix}}_{\text{(vecteurs unitaires)}}$$

$$\underline{T}(\Pi, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}_{e_r, e_\theta, e_z} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix}_{e_r, e_\theta, e_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma\cos\alpha \end{bmatrix}$$

2. Contrainte normale sur la facette : $\underline{T}(\Pi, \underline{n}) \cdot \underline{n}$

$$\Rightarrow \sigma_n = [(\sigma\cos\alpha)\underline{e}_z] \cdot [(\sin\alpha)\underline{e}_r + (\cos\alpha)\underline{e}_z]$$

$$= \sigma . \cos^2\alpha .$$

3. Contrainte tangentielle : $\underline{T}(\Pi, \underline{n}) \cdot \underline{\tau}$

$$\Rightarrow \sigma_\tau = -\sigma\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha$$

et σ_τ est extremum pour $\sin 2\alpha = \pm 1$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \pi/4 + k\pi/2}$$

ex 6.

1) $\sigma = ky \Rightarrow [\sigma] = ML T^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$

$[y] = L$

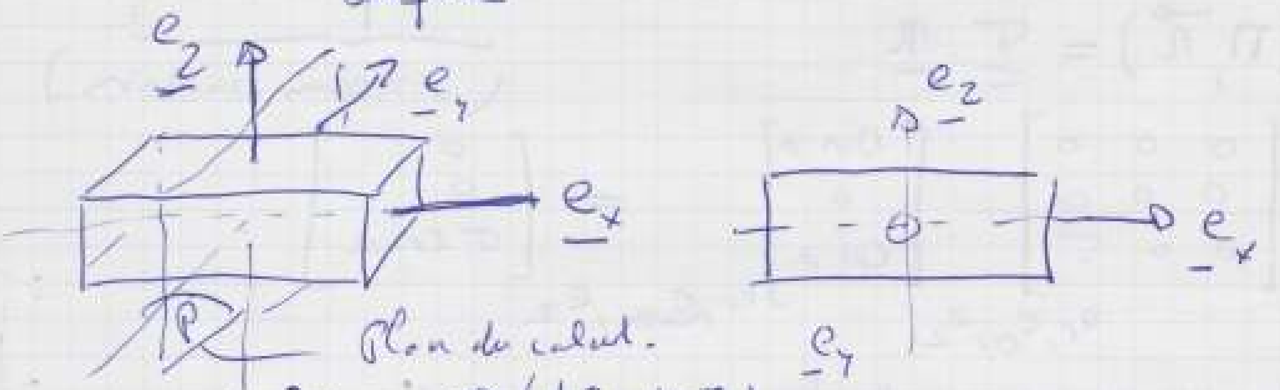
$\Rightarrow [k] = \frac{[\sigma]}{[y]} = ML^{-2}T^{-2}$

2) $\underline{T}(M, \underline{e}_x) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = ky$

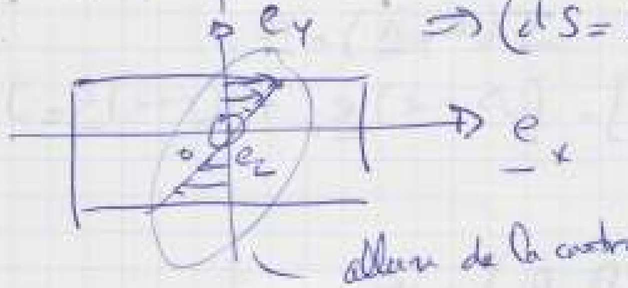
(vecteur contrainte.)

3 Résultante

$$\vec{R} = \int_{Surface} \underline{T}(M, \underline{e}_x)\, dS \quad \text{avec} \quad dS = dy \cdot dz.$$



$\Rightarrow (dS = dy\,dz)$



allure de la contrainte (vecteur) $\underline{T}(M, \underline{e}_x)$.

$y \to -\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$ et $z \to -\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$.

$$\vec{R} = \int_y \int_z ky\, dy\, dz\, \underline{e}_x = 0.$$

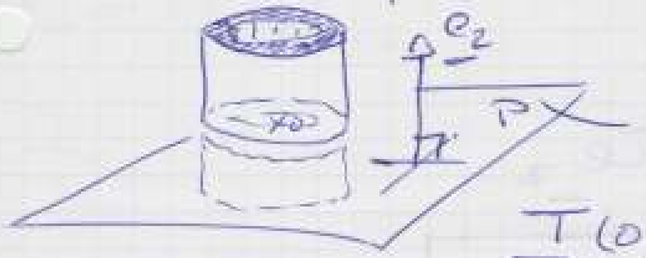
$$\vec{M}_{(O)} = \int_y \int_z \vec{OM} \wedge \underline{T}(M, \underline{e}_x)\, dS = -k \frac{bh^3}{12} \underline{e}_z$$

c'est une flexion pure !

ex. 7 Calcul de vecteurs contraintes -

(Préas) 4/
(électromagnétisme)
(Bréal)

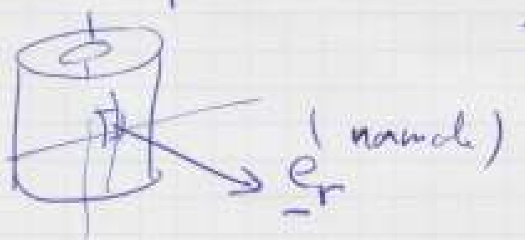
1) Sur un plan de Sect° du tube



$$\underline{T}(O, \underline{e}_z) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

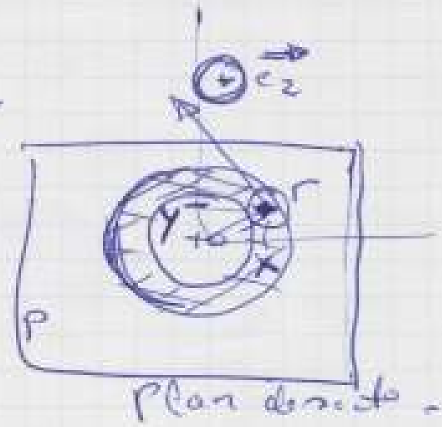
$$\boxed{\underline{T}(O, \underline{e}_z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ \sigma \end{bmatrix}_{\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z}}$$

2) Sur le pourtour du tube.



$$\underline{T}(\Pi, \underline{e}_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

3) Résultante en O au centre de la sect° -



$$\vec{R} = \int_S \underline{T}(O, \underline{e}_z)\, dS$$

$$dS = r\,dr\,d\theta.$$

$$\vec{R} = \int_S \tau\, r\,dr\,d\theta\, \underline{e}_\theta + \int_S \sigma\, r\,dr\,d\theta\, \underline{e}_z$$

$$\vec{R} = \underbrace{\tau \int_\theta \int_r r\,dr\,d\theta\, \underline{e}_\theta}_{0} + \sigma \iint_{\theta\, r} r\,dr\,d\theta\, \underline{e}_z = \frac{2\pi}{2}(R_e^2 - R_{int}^2)\sigma\, \underline{e}_z$$

Moment en O sur la sect° -

$$\vec{M}_r(O) = \int_S \vec{O\Pi} \wedge (\underline{T}(O, \underline{e}_z)\, dS) \quad \text{avec} \quad \underline{O\Pi} = r\,\underline{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{O\Pi} \wedge \underline{T}(O, \underline{e}_z) = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \tau \\ \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -r\sigma \\ r\tau \end{vmatrix}$$

$$\vec{m}(O) = \int_\theta \int_r \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sigma \\ r\tau \end{bmatrix} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \left(R_{Int}^3 - R_{ext}^3\right)\frac{1}{3}\tau \underline{e}_z$$

$$\boxed{\vec{m}(O) = \frac{2}{3}\pi\left(R_{Int}^3 - R_{ext}^3\right)\tau \underline{e}_z}$$